Quelques problème classiques sur les intégrales

30 septembre 2018

1 Calculs

1.1

Soient P et Q deux polynômes réels premiers entre eux, $n \geq 2$, avec deg P $=$ $n-2$ et deg$Q = n$, Q possédant n racines réelles distinctes $x_1 \dots, x_n$ strictement négatives. Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \sum_{i=1}^{n} \frac{P(x_i)}{Q'(x_i)} \log(-x_i).$$

1.2

Soit $(m, a) \in \mathbf{N} \times \mathbf{R}$; on note

$$L_m(a) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 2ax + 1)^{m+1}}$$

a) Décrire l'ensemble des valeurs de a pour les quelles l'intégrale converge. On suppose désormais $a \in]-1, 1[$.
b) Calculer $L_0(a)$.
c) Prouver que L_m vérifie la relation de récurrence

$$L_m(a) = \frac{2m-1}{2m(1-a^2)} L_{m-1}(a) - \frac{a}{2m(1-a^2)}.$$

d) Montrer que $L_m(a)$ peut s'écrire sous la forme

$$L_m(a) = \frac{R_m(a)}{(a^2-1)^m} + \frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}} \cdot \frac{\alpha_m}{(1-a^2)^m} + \frac{\beta}{\sqrt{1-a^2}} \cdot \frac{\gamma_m}{(1-a^2)^m}$$

où $R_m \in \mathbf{Q}[X]$, $\beta = \operatorname{arctg}(\frac{a}{\sqrt{1-a^2}})$, α_m et β_m sont dans $\mathbf{Q}$.

2 Intégrales simples

2.1 Inégalité de Young

Soit $f \in C(\mathbf{R}^+, \mathbf{R})$, strictement croissante tendant vers $+\infty$ en $+\infty$ et telle que $f(0) = 0$.
a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbf{R}^+$, $\int_0^x f + \int_0^{f(x)} f^{-1} = xf(x)$.
b) Montrer que, pour tout $(a, b) \in \mathbf{R}^+$, $\int_0^a f + \int_0^b f^{-1} \geq ab$. Etudier le cas d'égalité.
c) Soient $x > 0$, $y >$, $p > 1$, $q = \frac{p}{p-1}$ montrer que :

$$xy \leq x^p/p + y^q/q, \; xy \leq x \ln x + e^{y-1}.$$

2.2 Inégalité de Hilbert

Soit $P \in \mathbf{R}[X]$, $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.
a) Montrer que $\int_{-1}^{+1} P^2(x)dx = -i \int_0^{\pi} P^2(e^{i\theta})e^{i\theta}d\theta$.
b) En déduire que $\sum_{0 \leq k,l \leq n} \frac{a_k a_l}{k+l+1} \leq \pi \sum_{k=0}^{n} a_k^2$.

2.3 Inégalité de Wirtinger

Soit f une application de $[0, 1]$ dans $\mathbf{R}$ de classe C^1 telle que $f(0) = f(1) = 0$.
a) Convergence de $I_1 = \int_0^1 f(t)f'(t)\mathrm{cotg}\pi t\, dt$ et $I_2 = \int_0^1 \frac{f(t)^2}{\tan^2 \pi t}(1+\tan^2 \pi t)dt$. Relation entre I_1 et I_2.
b) Montrer que : $\int_0^1 f'(x)^2 dx \geq \pi^2 \int_0^1 f(x)^2 dx$. Cas d'égalité ?

3 Intégrales généralisees

3.1 Inégalité de Hardy

Soit $f \in L^2_c(\mathbf{R}^+)$. On définit l'opérateur de Hardy par :

$$G(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f$$

$x \mapsto F(x) = \int_0^x f$ est, par continuité de f, dérivable en 0, et $F'(0) = 0$; donc G a un prolongement continu en 0, puisque :

$$G(x) = \frac{F(x) - F(0)}{x - 0}$$

(i) Montrer qu'en $+\infty$ on a $F(x) = o(\sqrt{(x)})$. Il en résulte que $G \to 0$ en $+\infty$.

(ii) *(Inégalité de Hardy)* Montrer que $G \in L^2(\mathbf{R}^+)$ avec :

$$\int_0^{+\infty} G^2(x)dx \leq 4 \int_0^{+\infty} f^2(x)dx$$

3.2 Inégalité de Hermann Weyl)

Soit $f \in C^1(R^+, \mathbf{R})$ telle que :

$$t \longmapsto tf^2(t) \text{ est intégrable sur } \mathbf{R}^+$$

$$t \longmapsto tf'^2(t) \text{ est intégrable sur } \mathbf{R}^+$$

Montrer que f est de carré intégrable et qu'on a la majoration :

$$\int_0^{+\infty} f^2 \leq 2\sqrt{\int_0^{+\infty} tf^2(t)dt}\sqrt{\int_0^{+\infty} tf'^2(t)dt}$$

3.3 Inégalité de Gauss

Soit f une fonction décroissante positive sur $\mathbf{R}^+$ de limite nulle en $+\infty$. On dispose de $a > 0$ tel que $t \to t^a f(t)$ soit intégrable. Montrer que, pour tout $x > 0$, $x \int_0^{+\infty} f(t)dt \leq (\frac{a}{(a+1)x})^a \int_0^{\infty} t^a f(t)dt$.

3.4

Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ avec $0 < b < a$ et E l'ensemble des $f \in C(\mathbf{R}^+, \mathbf{R}^+)$ décroissantes telles que $\int_0^{+\infty} f(t)t^{2a}dt$ converge. Montrer qu'il existe $K \in \mathbf{R}$ tel que $\forall f \in E$, $(\int_0^{+\infty} f(t)t^{a+b}dt)^2 \leq K(\int_0^{+\infty} f(t)t^{2a}dt)(\int_0^{+\infty} f(t)t^{2b}dt)$. Montrer que la meilleure constante K possible est $\frac{(1+2a)(1+2b)}{(1+a+b)^2}$.

3.5 Inégalité de Young

a) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On pose $x_k = \frac{kx}{n}$, $k = 0, \ldots, n$, $y_k = f(x_k)$; comme f est uniformément continue sur le compact $[0, x]$, le module de la subdivision de $[0, f(x)]$ donnée par les y_k tend vers 0 et donc $T_n = \sum_{k=0}^{n-1}(y_{k+1} - y_k)f(y_k) = \sum_{k=0}^{n-1}(y_{k+1} - y_k)x_k$ tend vers $\int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt$.
Comme $S_n = \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1} - x_k)y_{k+1}$ tend vers $\int_0^x f(t)dt$, la somme$S_n + T_n$ tend vers le nombre cherché $\int_0^x f + \int_0^{f(x)} f^{-1}$; or $S_n + t_n = x_n f(x_n) - 0f(0) = xf(x)$ et le tour est joué.

b) On étudie, à b fixé, la fonction $\phi : x \to xb - \int_0^x f$ de dérivée $b - f(x)$ négative avant $f^{-1}(b)$ et positive après. La fonction ϕ atteint donc son minimum en $f^{-1}(b)$ qui vaut $bf^{-1}(b) - \int_0^{f^{-1}(b)} f = \int_0^b f^{-1}$ d'après le a) ; donc $\phi(a) \geq \int_0^b f^{-1}$ comme voulu.
c) Il suffit de choisir de bonnes fonctions. Pour la première inégalité c'est $f(x) = x^{p-1}$, pour la deuxième $f(x) = \ln(1 + x)$ paraît-il...

3.6 Inégalité de Hilbert

a) On n'a pas droit aux changement de variable complexe (qui ne deviennent cohérents qu'avec la théorie des intégrales de chemin). En fait, le résultat à démontrer vaut pour tout polynôme Q, le carré est intempestif : si $Q(X) = X^n$, $\int_{-1}^1 x^n dx = -i \int_0^\pi e^{i(n+1)t}dt$, et l'on conclut par combinaison linéaire !

b) Un calcul direct donne

$$\int_{-1}^0 P^2(x)dx = \int_0^1 \sum_{0 \leq k,l \leq n} a_k a_l x^{k+l} = \sum_{0 \leq k,l \leq n} \frac{a_k a_l}{k + l + 1}$$

Or $\int_0^1 P^2(t)dt \leq \int_{-1}^1 P^2(t)dt$ et

$$\int_{-1}^1 P^2(t)dt = \int_{-1}^1 P^2(-t)dt = -i \int_0^\pi P^2(-e^{it})e^{it}dt = i \int_{-\pi}^0 P^2(e^{it})e^{it}dt$$

et de ce fait

$$2 \sum_{0 \leq k,l \leq n} \frac{a_k a_l}{k + l + 1} \leq 2 \int_{-1}^1 P^2(t)dt \leq \int_{-\pi}^\pi |P(e^{it})|^2 dt = 2\pi \sum_{k=0} n|a_k|^2.$$

3.7 Inégalité de Wirtinger

Un développement limité montre que les deux intégrales sont faussement impropres en 0 et en 1.

Par intégration par parties :

$$I1 = \frac{1}{2}[\frac{f^2(x)}{\tan \pi x}]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\pi(1+\tan^2 \pi x)}{\tan^2 \pi x}$$

c'est-à-dire $I_1 = \frac{\pi}{2} I_2$.
b) Posons $J_1 = \int_0^1 f'^2(x)dx$, $J_1 = \int_0^1 f^2(x)dx$ et $J = \int_0^1 \frac{f^2(x)}{\tan^2 \pi x}dx$. L'inégalité de Cauchy-Scharz appliquée à J_1 donne : $I_1^2 \leq J_1$. Comme $I_2 = J + J_2$ il vient :

$$I_1^2 = \frac{\pi^2}{4} I_2^2 = \frac{\pi^2}{4}[((J - J_2)^2 + 4JJ_2] \geq \pi^2 J_2.$$

Si $J = 0$, f est nulle donc en réunissant nos résultats :

$$J_1 \geq \pi^2 J_2.$$

(i) Avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left|\int_0^x f\right| \leq \left(\int_0^x f^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^x 1\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}\left(\int_0^x f^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $A > 0$ tel que :

$$\int_A^{+\infty} f^2 \leq \varepsilon^2$$

De là il résulte que, pour $x \geq A$, à nouveau par Cauchy-Schwarz :

$$\int_A^x |f| \leq \sqrt{x - A}\varepsilon$$

Résumons ; pour $x \geq A$:

$$\frac{1}{\sqrt{x}}\left|\int_0^x f\right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^A |f| + \varepsilon\sqrt{\frac{x-A}{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^A |f| + \varepsilon$$

Il existe en plus $A_\varepsilon \geq A$ tel que :

$$\forall x \geq A_\varepsilon, \ \frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^A |f| \leq 2\varepsilon$$

Et alors :

$$\forall x \geq A_\varepsilon, \ \frac{1}{\sqrt{x}}\left|\int_0^x f\right| \leq 2\varepsilon$$

(ii) On se donne deux nombres $0 < \varepsilon < A$, il vient après une intégration par parties :

$$\int_\varepsilon^A G^2 = \int_\varepsilon^A \frac{1}{t^2}F^2(t)dt = \left[-\frac{1}{t}F^2(t)\right]_\varepsilon^A + 2\int_\varepsilon^A \underbrace{\frac{F(t)}{t}}_{=G(t)} f(t)dt$$

L'inégalité de Schwarz donne :

$$\int_{\varepsilon}^{A} G(t)f(t)dt \leq \left(\int_{\varepsilon}^{A} G^2(t)dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\varepsilon}^{A} f^2(t)dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

Il en résulte que :

$$\int_{\varepsilon}^{A} G^2(t)dt \leq -\frac{F^2(A)}{A} + \frac{F^2(\varepsilon)}{\varepsilon} + 2\left(\int_{\varepsilon}^{A} f^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\varepsilon}^{A} G^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Les deux premiers termes tendent vers 0 lorsque $\varepsilon \to 0^+$ et $A \to +\infty$. On a donc :

$$\int_{0}^{A} G^2(t) \leq 2\left(\int_{0}^{A} f^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{0}^{A} G^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

En élevant au carré, on peut simplifier, et correctement faire tendre A vers $+\infty$, ce qui prouve que $G \in L^2(\mathbf{R}^+)$ avec :

$$\int_{0}^{+\infty} G^2 \leq 4\int_{0}^{+\infty} f^2$$

La fonction f est trivialement dans $L^2(\mathbf{R}^+)$ car :

$$\forall t \geq 1,\ f^2(t) \leq tf^2(t)$$

On part alors de l'intégrale $\int_0^A tf(t)f'(t)dt$que l'on majore pour obtenir :

$$\int_{0}^{A} tf(t)f'(t)dt \leq \int_{0}^{A} |\sqrt{t}f(t)||\sqrt{t}f'(t)|dt \leq \sqrt{\int_{0}^{A} tf^2(t)}\sqrt{\int_{0}^{A} tf'^2(t)dt}$$

De là il suit que la fonction $t \longmapsto tf(t)f'(t)$ est intégrale su $\mathbf{R}^+$ et :

$$\left|\int_{0}^{+\infty} tf(t)f'(t)dt\right| \leq \sqrt{\int_{0}^{+\infty} tf^2(t)dt}\sqrt{\int_{0}^{+\infty} tf'^2(t)dt}$$

On peut en outre effectuer une intégration par partie (sur $[0; A]$ d'abord) qui donne :

$$\int_{0}^{A} tf(t)f'(t) = \underbrace{\left[\frac{1}{2}tf^2(t)\right]_0^A}_{=\frac{1}{2}Af^2(A)} - \frac{1}{2}\int_{0}^{A} f^2(t)dt$$

Les deux intégrales étant convergentes, il vient :

$$Af^2(A) \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} L \in \mathbf{R}$$

Or, nécessairement $L = 0$, sinon $f^2(A) \sim_{A\to+\infty} \frac{L}{A}$, qui n'est pas intégrable. Donc :

$$\int_0^{+\infty} tf(t)f'(t) = -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} f^2(t)dt$$

Enfin, on obtient bien l'inégalité demandée :

$$\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} f^2(t)dt \leq \sqrt{\int_0^{+\infty} tf^2(t)}\sqrt{\int_0^{+\infty} tf'^2(t)dt}$$

Solution. L'inégalité dépend linéairement de f, à condition de prendre des coefficients positifs. On va donc regarder des cas simples, puis les étendre par combinaison. Supposons tout d'abord que f soit une fonction caractéristique $\chi_{[0,A]}$ et que $x \leq A$ (sinon...) l'inégalité à démontrer s'écrit alors :

$$A - x \leq (\frac{a}{(a+1)x})^a \frac{Aa+1}{a+1}$$

or la fonction ϕ définie sur $[0, A]$ par $x \to x^a(A-x)$ atteint sur $[0, A]$ son maximum en $\frac{aA}{a+1}$ où elle vaut $(\frac{a}{(a+1)})^a \frac{A^{a+1}}{a+1}$, ce qui est le résultat souhaité.

Supposons ensuite que g soit à support compact $[0, A]$. La preuve usuelle de la densité des fonctions en escalier parmi les fonctions CPM sur $[0, A]$ donne une suite de combinaisons linéaires à coefficients positifs de fonctions de la forme $\chi_{[0,b]}$, $b \leq A$, qui converge uniformément vers f sur $[0, A]$ (dessin, c'est un excellent exercice que de détailler ce résultat). Les fonctions ayant leurs supports dans un compact fixe, l'inégalité passe à la limite.

Enfin dans le cas général, on remplace f par $f\chi_{[0,A]}$ et 'on passe à la limite lorsque A tend vers $+\infty$ grâce au théorème de convergence de dominée.
Solution. $K = 1$ convient par l'inégalité de Schwarz; la suite est plus pénible :
Pour $0 < c \leq a$, la fonction $t \to -t^{2c+1}f'(t)$ est intégrable, car une intégration par partie donne

$$\int_0^A -t^{2c+1}f'(t)dt = -t^{2c+1}f(t)]_0^A + (2c+1)\int_0^A t^{2c}f(t) \leq (2c+1)\int_0^A t^{2c}f(t)dt$$

le membre de droite $\int_0^{+\infty} t^{2c}f(t)dt$ converge. On obtient de plus que $f(x)x^{2c+1}$ admet une limite en $+\infty$, limite forcément nulle, sans quoi $f(t)t^{2a}$ n'est pas intégrable. Il vient donc

$$\int_0^{+\infty} -t^{2c+1}f'(t)dt = (2c+1)\int_0^{+\infty} t^{2c}f(t)dt.$$

Prenons $c = (a+b)/2$. l'application de l'inégalité de Schwarz à l'intégrale de gauche

$$\int_0^{+\infty} -t^{2c+1}f'(t)dt \leq \int_0^{+\infty} (-f'(t))t^{2a+1}dt. \int_0^{+\infty} t^{2b+1}(-f'(t))dt$$

deux nouvelles intégrations par parties montrent que le produit des intégrales de droite est

$$(2a+1)(2b+1)\left(\int_0^{+\infty} f(t)t^{2a}dt\right)\left(\int_0^{+\infty} f(t)t^{2b}dt\right)$$

AQT

l'optimalité vient en considérant une suite de fonctions lisses qui converge vers la fonction caractéristique de $[0,1]$.